

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Алтайский государственный педагогический университет»
(ФГБОУ ВО «АлтГПУ»)

УТВЕРЖДАЮ
проректор по образовательной и
международной деятельности

_____ С.П. Волохов

Вариационное исчисление
рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой	Кафедра математики и методики обучения математике
Учебный план	ПМ01.03.04_2022.plx 01.03.04 Прикладная математика
Квалификация	бакалавр
Форма обучения	очная
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ

Часов по учебному плану	144	Виды контроля в семестрах:
в том числе:		зачеты с оценкой 6
аудиторные занятия	62	
самостоятельная работа	78	

Программу составил(и):

кандидат физико-математических наук, Доц., Янов Сергей Иванович _____

Рабочая программа дисциплины

Вариационное исчисление

разработана на основании ФГОС ВО - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика (приказ Минобрнауки России от 15.01.2018 г. № 11)

составлена на основании учебного плана 01.03.04 Прикладная математика (Уровень: бакалавриат; квалификация: бакалавр), утвержденного Учёным советом ФГБОУ ВО «АлтГПУ» от 25.04.2022, протокол № 9.

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры

Кафедра математики и методики обучения математике

Протокол № 8 от 19.04.2022 20:00:00 г.

Срок действия программы: 2022-2026 уч.г.

Зав. кафедрой Борисенко Оксана Викторовна

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	6 (3.2)		Итого	
Неделя	21 2/6			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП
Лекции	22	22	22	22
Практические	40	40	40	40
Контроль самостоятельной работы	4	4	4	4
Итого ауд.	62	62	62	62
Контактная работа	66	66	66	66
Сам. работа	78	78	78	78
Итого	144	144	144	144

1.1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
1.1.1	приобретение студентами знаний в области вариационного исчисления, приобретение практических навыков построения, анализа математических моделей, в которых необходимо найти экстремум некоторой функции или функционала, а также значений параметров задачи, при которых этот экстремум достигается, и решения соответствующих экстремальных задач.
1.2. ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
1.2.1	развитие основных понятий математического анализа, логического мышления студентов;
1.2.2	овладение методами исследования и решения математических задач на экстремум функционалов;
1.2.3	применение методов вариационного исчисления.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ	
Цикл (раздел) ОП:	Б1.В
2.1	Требования к предварительной подготовке обучающегося:
2.1.1	Математика
2.1.2	Линейная алгебра и аналитическая геометрия
2.1.3	Дифференциальные уравнения
2.1.4	Функциональный анализ
2.2	Дисциплины (модули) и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:
2.2.1	Исследование операций
2.2.2	Производственная практика: научно-исследовательская работа
2.2.3	Производственная практика: преддипломная практика

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
ПК-8.1: Определяет возможности оптимизации работы систем безопасности с целью уменьшения нагрузки на работу БД	
ПК-8.2: Осуществляет выбор наиболее эффективных путей снижения нагрузки при обеспечении заданного уровня безопасности данных на уровне БД	
УК-1.1: Ставит и анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие	
УК-1.2: Осуществляет поиск, обработку, анализ и синтез информации для решения поставленных задач	
УК-1.3: Рассматривает различные варианты решения поставленных задач на основе системного подхода, научных методов и достижений	

В результате освоения дисциплины (модуля) обучающийся должен

3.1	Знать:
3.1.1	основные положения, законы и методы фундаментальной математики и естественно-математических дисциплин для понимания сущности проблемы;
3.1.2	основные математические приложения и физические законы, явления и процессы, на которых основаны принципы действия объектов профессиональной деятельности.
3.2	Уметь:
3.2.1	приводить научные положения и факты для обоснования сущности проблемы;
3.2.2	отбирать эффективные методы решения проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности.
3.3	Владеть:
3.3.1	современными проблемами естественных наук и математики; методами физико-математического моделирования для решения естественнонаучных заданий, типовых задач в рамках профессиональной деятельности и методами анализа результатов моделирования и принятия решения на основе полученных результатов.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)					
Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература
	Раздел 1. Функционал, его вариация				

1.1	Функционал, его вариация /Лек/	6	2	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
1.2	Функционал, его вариация /Пр/	6	4	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
1.3	Функционал, его вариация /Ср/	6	6	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
	Раздел 2. Экстремум функционала. Необходимое условие. Уравнение Эйлера				
2.1	Экстремум функционала. Необходимое условие. Уравнение Эйлера. /Лек/	6	2	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
	Раздел 3.				
3.1	Экстремум функционала. Необходимое условие. Уравнение Эйлера. /Пр/	6	8	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
3.2	Экстремум функционала. Необходимое условие. Уравнение Эйлера. /Ср/	6	12	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
3.3	Функционалы, зависящие от нескольких функций. /Лек/	6	3	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
3.4	Функционалы,зависящие от нескольких функций /Пр/	6	3	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
3.5	Функционалы, зависящие от нескольких функций. /Ср/	6	14	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
	Раздел 4.				
4.1	Функционалы, зависящие от производных высших порядков, функций нескольких переменных. /Лек/	6	3	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
4.2	Функционалы, зависящие от производных высших порядков, функций нескольких переменных. /Пр/	6	3	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
4.3	Функционалы, зависящие от производных высших порядков, функцийнесколько переменных /Ср/	6	14	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
4.4	Достаточные условия экстремума /Лек/	6	4	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
4.5	Достаточные условия экстремума. /Пр/	6	6	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2

4.6	Достаточные условия экстремума /Ср/	6	10	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
4.7	Задачи с подвижными границами. /Лек/	6	6	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
4.8	Задачи с подвижными границами. /Пр/	6	10	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
4.9	Задачи с подвижными границами. /Ср/	6	10	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
4.10	Задачи на условный экстремум. /Лек/	6	2	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
4.11	Задачи на условный экстремум. /Пр/	6	6	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
4.12	Задачи на условный экстремум. /Ср/	6	12	УК-1.1 УК-1.2 УК-1.3 ПК-8.1 ПК-8.2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Перечень индикаторов достижения компетенций, форм контроля и оценочных средств

УК-1.1: Ставит и анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие
 УК-1.2: Осуществляет поиск, обработку, анализ и синтез информации для решения поставленных задач
 УК-1.3: Рассматривает различные варианты решения поставленных задач на основе системного подхода, научных методов и достижений
 ПК-8.1: Определяет возможности оптимизации работы систем безопасности с целью уменьшения нагрузки на работу БД
 ПК-8.2: Осуществляет выбор наиболее эффективных путей снижения нагрузки при обеспечении заданного уровня безопасности данных на уровне БД

5.2. Технологическая карта достижения индикаторов

Перечень индикаторов компетенций: ИУК-1.1, ИУК-1.4, ИОПК -1.1, ИОПК-1.2
 Виды учебной работы: лекционные занятия
 Формы контроля и оценочные средства:
 вопросы для самоконтроля (10 баллов)
 Перечень индикаторов компетенций: ИУК-1.1, ИУК-1.4, ИОПК -1.1, ИОПК-1.2
 Виды учебной работы: семинарские занятия
 Формы контроля и оценочные средства:
 вопросы для самоконтроля, контрольная работа, самостоятельная работа (30 баллов)
 Перечень индикаторов компетенций: ИУК-1.1, ИУК-1.4, ИОПК -1.1, ИОПК-1.2
 Виды учебной работы: контрольный срез
 Формы контроля и оценочные средства:
 контрольная работа (25 баллов)
 Перечень индикаторов компетенций: ИУК-1.1, ИУК-1.4, ИОПК -1.1, ИОПК-1.2
 Виды учебной работы: самостоятельная работа
 Формы контроля и оценочные средства:
 индивидуальная работа (20 баллов)
 Перечень индикаторов компетенций: ИУК-1.1, ИУК-1.4, ИОПК -1.1, ИОПК-1.2
 Виды учебной работы: зачет с оценкой
 Формы контроля и оценочные средства:
 вопросы к зачету с оценкой(15 баллов)

5.3. Формы контроля и оценочные средства

Вопросы к зачету с оценкой
 Понятие функционала, свойства.
 Вариация функционала.

Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума.

Лемма Дю-Буа-Реймона.

Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера: а) $F=F(x,y)$; б) $F=M(x,y)+N(x,y)$; в) $F=F(y')$.

Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера: а) $F=F(x, y')$; б) $F=F(y, y')$.

Задача о брахистохроне.

Задача о наименьшей поверхности вращения.

Задача о распространении света в неоднородной среде.

Функционалы, зависящие от производных высшего порядка.

Функционалы, зависящие от нескольких функций.

Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных.

Поле экстремалей.

С-дискриминантные кривые.

Условие Якоби для центрального поля экстремалей.

Вариация на экстремальных пучках.

Достаточные условия Вейерштрасса экстремума функционала.

Достаточные условия Лежандра экстремума функционала.

Простейшая вариационная задача с подвижными границами.

Разрывные задачи первого и второго рода.

Задачи о преломлении луча света.

Односторонние вариации.

Понятие условного экстремума. Необходимое условие экстремума.

Изопериметрические задачи.

Задача Дидоны.

Задача о геодезических линиях.

Задача об отражении луча света.

Центральное поле экстремалей

Примерные задания контрольных работ:

Найти вариацию $J[y]$.

Найти экстремали функционала.

Образуют ли собственное поле семейство $y = (x - C)^3$, при $x^2/4 + y^2/9 \leq 1$.

Образуют ли центральное поле семейство кривых $y = C \cos x$, $\pi/2 < x \leq \pi$.

Найти С-дискриминант семейства $y = Cx + C^2$.

Исследовать на экстремум функционал.

Найти кратчайшее расстояние от точки $(-1, 5)$ до параболы $y^2 = x$.

Примерные задания самостоятельных работ

Найти вариацию $J[y]$.

Найти экстремали функционала.

Исследовать на экстремум функционал.

Вопросы для самоконтроля

Понятие функционала, вариации функционала.

Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума. Уравнение Эйлера. Нахождение экстремалей.

Необходимое условие экстремума функционала, зависящего от нескольких функций.

Нахождение экстремалей.

Необходимое условие экстремума функционала, зависящего от производных высших порядков. Нахождение экстремалей.

Поле экстремалей. С-дискриминантные кривые.

Условие Якоби для центрального поля экстремалей

Достаточное условие экстремума Вейерштрасса. Нахождение экстремумов.

Достаточное условие экстремума Лежандра. Нахождение экстремумов.

Вариационные задачи с подвижными границами.

Решение вариационных задач на условный экстремум.

Примерные задания индивидуальных работ

Определить форму твердого тела, движущегося в потоке газа с наименьшим сопротивлением.

Определить форму тела, у которого при постоянной площади поверхности объем будет наибольшим.

Определить кривую с заданными граничными точками А, В, при вращении которой вокруг оси абсцисс образуется поверхность наименьшей площади.

Найти поверхность минимальной площади, натянутой на данный контур С.

5.4. Оценка результатов обучения в соответствии с индикаторами достижения компетенций

Неудовлетворительно. Не достигнут.

Удовлетворительно. Пороговый уровень: знает фрагментарно основные положения, законы и методы фундаментальной математики и естественно-математических дисциплин для понимания сущности проблемы; основные математические приложения и физические законы, явления и процессы, на которых основаны принципы действия объектов профессиональной деятельности, не в полной мере умеет приводить научные положения и факты для обоснования сущности проблемы; отбирать эффективные методы решения проблем, возникающих в ходе профессиональной

деятельности; испытывает затруднения при решении типовых задач в рамках профессиональной деятельности и методами анализа результатов моделирования и принятия решения на основе полученных результатов.

Хорошо. Базовый уровень: в целом знает основные положения, законы и методы фундаментальной математики и естественно-математических дисциплин для понимания сущности проблемы; основные математические приложения и физические законы, явления и процессы, на которых основаны принципы действия объектов профессиональной деятельности, в общих чертах приводит научные положения и факты для обоснования сущности проблемы; отбирает эффективные методы решения проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности; допускает отдельные ошибки при решении типовых задач в рамках профессиональной деятельности и методами анализа результатов моделирования и принятия решения на основе полученных результатов

Отлично. Высокий уровень: знает основные положения, законы и методы фундаментальной математики и естественно-математических дисциплин для понимания сущности проблемы; основные математические приложения и физические законы, явления и процессы, на которых основаны принципы действия объектов профессиональной деятельности, в полном объеме умеет приводить научные положения и факты для обоснования сущности проблемы; отбирать эффективные методы решения проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности; свободно решает типовые задачи в рамках профессиональной деятельности и методами анализа результатов моделирования и принятия решения на основе полученных результатов

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Издание	Экз.
Л1.1	Ю. В. Тракимус, Д. В. Вагин	Основы вариационного исчисления: учебное пособие — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2016 — URL: http://www.iprbookshop.ru/91738.html	9999
Л1.2	М. П. Моклячук	Вариационное исчисление. Экстремальные задачи: учебник — Москва : Регулярная и хаотическая динамика ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2019 — URL: http://www.iprbookshop.ru/91913.html	9999

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Издание	Экз.
Л2.1	А. Б. Васильева [и др.]	Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах: [учебное пособие для студентов вузов] — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005	20
Л2.2	И. Н. Щитов	Введение в методы оптимизации: учебное пособие для студентов вузов — Москва : Высшая школа, 2008	25

6.3.1 Перечень программного обеспечения

6.3.1.1	Пакет Microsoft Office
6.3.1.2	Операционная система семейства Windows
6.3.1.3	Программа для просмотра электронных документов формата pdf, djvu

6.3.2 Перечень информационных справочных систем

6.3.2.1	Национальная электронная библиотека : федеральная государственная информационная система / Министерство культуры Российской Федерации, Российская государственная библиотека
6.3.2.2	Межрегиональная аналитическая роспись статей : поиск статей в российской периодике (МАРС) / АРБИКОН
6.3.2.3	Электронная библиотека НПП / Алтайский государственный педагогический университет, Научно-педагогическая библиотека
6.3.2.4	eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека
6.3.2.5	Цифровой образовательный ресурс IPR Smart / Ай Пи Ар Медиа
6.3.2.6	Гарант: информационное-правовое обеспечение

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1	Оборудованные учебные аудитории, в том числе с использованием мультимедийных комплектов, подключением к сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду Университета.
7.2	Аудитории для самостоятельной работы с подключением к сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду Университета.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Студентам предлагается использовать указанную литературу для более прочного усвоения учебного материала, изложенного на лекциях, а также для изучения материала, запланированного для самостоятельной работы. Студентам необходимо выполнить индивидуальные задания по основным темам курса. Задания, вынесенные на самостоятельную работу, проверяются в течение семестра. Оценки за индивидуальные задания и самостоятельную работу учитываются при

выставлении оценок на зачете. Целью самостоятельной работы, то есть работы, выполняемой студентами во внеаудиторное время по заданию и руководству преподавателя, является глубокое понимание и усвоение курса лекций и практических занятий, подготовка к выполнению контрольных работ, к выполнению семестрового задания, к сдаче зачета, овладение профессиональными умениями и навыками деятельности, опытом творческой, исследовательской деятельности. Для успешной подготовки и сдачи зачета необходимо проделать следующую работу:

Изучить теоретический материал, относящийся к каждой из тем

Выработать устойчивые навыки в решении типовых практических заданий.

Выполнить контрольные работы, проводимые в течение семестра.

Методические рекомендации для обучающихся (с ОВЗ)

Под специальными условиями для получения образования обучающимися с ограниченными возможностями здоровья понимаются условия обучения, воспитания и развития, включающие в себя использование специальных образовательных программ и методов обучения и воспитания, специальных учебников, учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования. Построение образовательного процесса ориентировано на учет индивидуальных возрастных, психофизических особенностей обучающихся, в частности предполагается возможность разработки индивидуальных учебных планов. Реализация индивидуальных учебных планов сопровождается поддержкой тьютора (родителя, взявшего на себя тьюторские функции в процессе обучения, волонтера). Обучающиеся с ОВЗ, как и все остальные студенты, могут обучаться по индивидуальному учебному плану в установленные сроки с учетом индивидуальных особенностей и специальных образовательных потребностей конкретного обучающегося. При составлении индивидуального графика обучения для лиц с ОВЗ возможны различные варианты проведения занятий: проведение индивидуальных или групповых занятий с целью устранения сложностей в усвоении лекционного материала, подготовке к семинарским занятиям, выполнению заданий по самостоятельной работе. Для лиц с ОВЗ, по их просьбе, могут быть адаптированы как сами задания, так и формы их выполнения. Выполнение под руководством преподавателя индивидуального проектного задания, позволяющего сочетать теоретические знания и практические навыки; применение мультимедийных технологий в процессе ознакомительных лекций и семинарских занятий, что позволяет экономить время, затрачиваемое на изложение необходимого материала и увеличить его объем. Для осуществления процедур текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации преподавателя, в соответствии с потребностями студента, отмеченными в анкете, и рекомендациями специалистов дефектологического профиля, разрабатывает фонды оценочных средств, адаптированные для лиц с ограниченными возможностями здоровья и позволяющие оценить достижение ими запланированных в основной образовательной программе результатов обучения и уровень сформированности всех компетенций, заявленных в образовательной программе. Форма проведения текущей аттестации для студентов с ОВЗ устанавливается с учетом индивидуальных психофизических особенностей (устно, письменно на бумаге, письменно на компьютере, в форме тестирования и т.п.). Лицам с ОВЗ может быть предоставлено дополнительное время для подготовки к ответу на экзамене, выполнения задания для самостоятельной работы. При необходимости студент с ограниченными возможностями здоровья подает письменное заявление о создании для него специальных условий в Учебно-методическое управление Университета с приложением копий документов, подтверждающих статус инвалида или лица с ОВЗ.